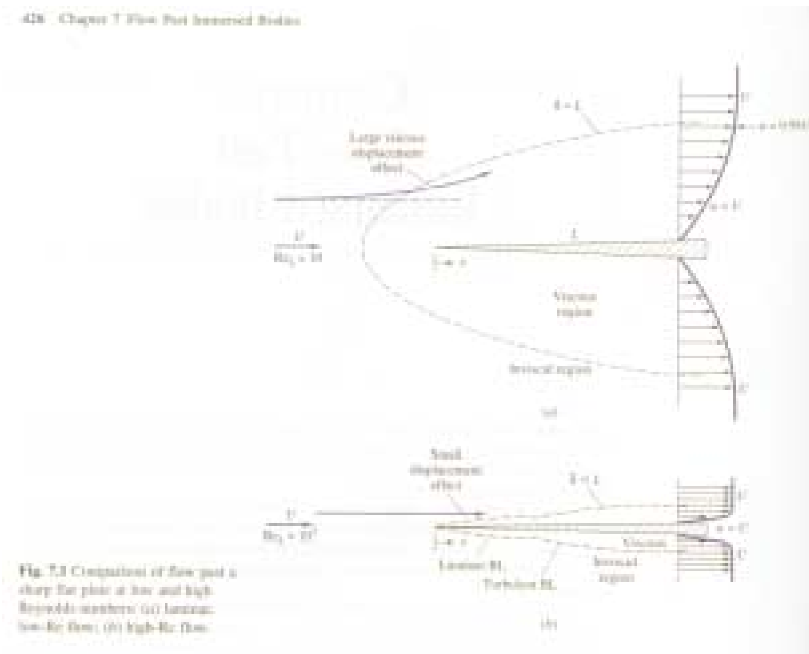
8 Grenzschichten

8.1 Grenzschichttheorie

Lösungen für ideale Strömungen geben keine Auskunft über die Reibungskraft. Diese (bzw. der Strömungswiderstand) sind aber zentrale Grössen in jeder technischen Anwendung der Strömungslehre.

Für hohe Reynoldszahlen sind viskose Effekte nur in sehr kleinen Abständen von Hindernissen oder Wänden relevant. Prandtl (1904) hat gezeigt, dass für grosse Re die viskosen Effekte auf eine dünne Grenzschicht (Dicke $\delta << L$) beschränkt sind. Für Abstände $> \delta$ verhält sich die Strömung wie eine ideale Strömung.



Grenzschichten: Figur aus White.

Wenn die Grenzschichtdicke δ viel kleiner ist als die charakteristische Dimension eines Körpers und auch viel kleiner als der Krümmungsradius der Oberfläche, können ebene Oberflächenkoordinaten (x,y) verwendet

werden (x entlang der Oberfläche, parallel zur Strömung, y senkrecht zur Oberfläche). Die Gleichungen lassen sich dann vereinfachen zu

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{8.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \tag{8.2}$$

Der dritte Term auf der rechten Seite tritt nur auf, wenn die Strömung turbulent ist (u',v' bezeichnen hier die Fluktuationen). Die y-Komponente der Bewegungsgleichung reduziert sich auf eine Beziehung für den Druck, welcher durch die externe Strömung (u_{ext}) gegeben ist:

$$p=p(x) \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{dx}=-\rho u_{ext}\frac{du_{ext}}{dx} \tag{8.3}$$

Die Randbedingungen für die Strömung sind

$$u(y=0)=v(y=0)=0 \tag{8.4}$$

$$u(y\to\infty)\to u_{ext} \tag{8.5}$$

Das Grenzschichtgleichung (8.2) hat den Charakter einer Diffusionsgleichung (1. Ordnung in x, 2. Ordnung in y; x anstelle der Zeit t in einer Diffusionsgleichung). Bei bekannter externer Strömung u_{ext} lassen sich die Grenzschichtgleichungen - beginnend beim vorderen Staupunkt - lösen (in der Regel numerisch).

In der Praxis verwendet man als Grenzschichtdicke den Wert von y, wo die Geschwindigkeit 99% des Wertes der externen Geschwindigkeit angenommen hat

$$\delta_{99}: \qquad u(\delta_{99})=0.99\,u_{ext} \tag{8.6}$$

Eine nützliche Definition der Reynoldszahl für Grenzschichtprobleme ist

$$\mathrm{Re}_x=\frac{ux}{\nu} \tag{8.7}$$

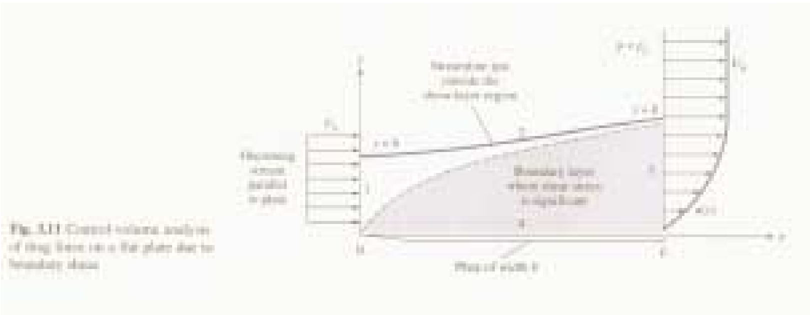
Je nach dem Wert von Re_x ist die Grenzschicht laminar oder turbulent, Turbulenz setzt ein bei

$$\mathrm{Re}_x\approx 10^6 \tag{8.8}$$

(genauer: bei Re_x im Bereich von etwa 5×10^5 bis 3×10^6, abhängig von der Oberflächenrauhigkeit).

8.2 Reibungskraft

Ist einmal eine Lösung u(x,y) für die Grenzschicht bekannt, so lässt sich auch der Reibungswiderstand berechnen.



(Abbildung aus White)

Die Reibungskraft ergibt sich aus der Bilanz der Impulsflussdichte über ein Kontrollvolumen (vgl. die Figur oben)

$$F_R = \rho b U_0^2 h - \rho b \int_0^\delta u^2 dy \tag{8.9}$$

Der Wert von h ergibt sich aus der Massenerhaltung in demselben Kontrollvolumen

$$hU_0 - \int_0^\delta u\, dy = 0 \tag{8.10}$$

Daraus ergibt sich der Widerstand zu

$$F_R = \rho b U_0^2 \int_0^\delta \left(\frac{u}{U_0} - \frac{u^2}{U_0^2} \right) dy \Bigg|_{x=L} \tag{8.11}$$

8.3 Laminare Strömung über eine ebene Platte

Blasius hat 1908 die Lösung für die laminare Strömung über eine ebene, infinitesimal dünne Platte (mit Beginn bei x=0) hergeleitet. Er führte die folgenden dimensionslosen Grössen (Ähnlichkeitsvariablen) ein

$$\eta \equiv y \left(\frac{u}{\nu x} \right)^{1/2} \tag{8.12}$$

$$\frac{u}{U} = f'(\eta) \tag{8.13}$$

U ist die (konstante) Geschwindigkeit in der externen Strömung, f' eine dimensionslose Stromfunktion. In diesen Variablen reduziert sich die Grenzschichtgleichung zu

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{8.14}$$

mit den Randbedingungen

$$f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = 0 \quad , \quad f'(\eta \to \infty) \to 1 \tag{8.15}$$

Die Lösung erhält man durch numerische Integration:

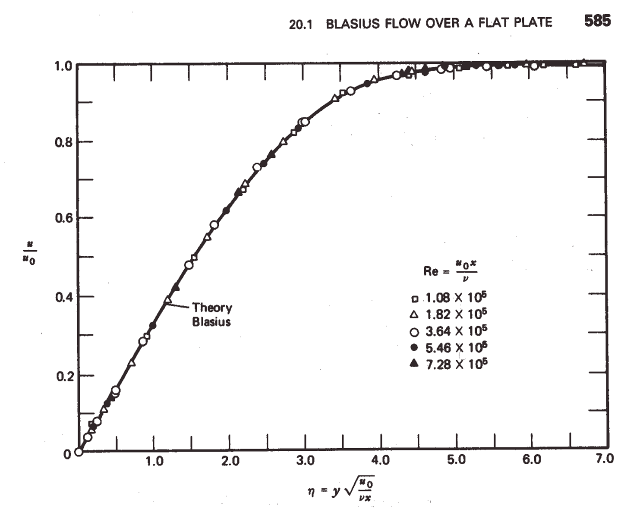


Figure 20.2 Results of experiments compared with analysis. The effective origin of the plate is found from data at two different positions. The graph is adapted from Schlichting (1950). Nikuradse (1942) made the original measurements.

(Figur aus Panton: u/U als Funktion von η)

In der Lösung findet man u/U = 0.99 für $\eta \approx 5$, also

$$\frac{\delta_{99}}{x} \approx \frac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{8.16}$$

Entlang der Platte wächst also die Grenzschichtdicke proportional zu x.

Wählen wir als Beispiel eine Strömung mit $\mathrm{Re}_x = 10^6$ (gerade noch laminar..), so erhalten wir

$$\frac{\delta_{99}}{x} = 5\times 10^{-3} \tag{8.17}$$

Nach (8.16) wird die Grenzschicht mit zunehmendem Re immer dünner. Damit werden die Geschwindigkeitsgradienten immer grösser; bei genügend hoher Re sind die Gradienten so gross, dass die Grenzschicht turbulent wird. Die entstehende turbulente Grenzschicht ist dann wieder dicker als entsprechende laminare Grenzschicht (vgl. die Figur auf Seite 63).

8.4 Strömungsabriss

In einer Grenzschicht mit einem Druckgradienten wirkt auf alle Flüssigkeitselemente die gleiche Druckkraft (da ja dp/dx nicht von y abhängt). Ist der Druckgradient positiv, werden alle Flüssigkeitselemente gleich abgebremst. Für Flüssigkeitselemente nahe der Wand, welche nur kleine Geschwindigkeit haben, kann dies bedeuten, dass sich ihre Strömungsrichtung umkehrt: die Grenzschicht löst sich ab.

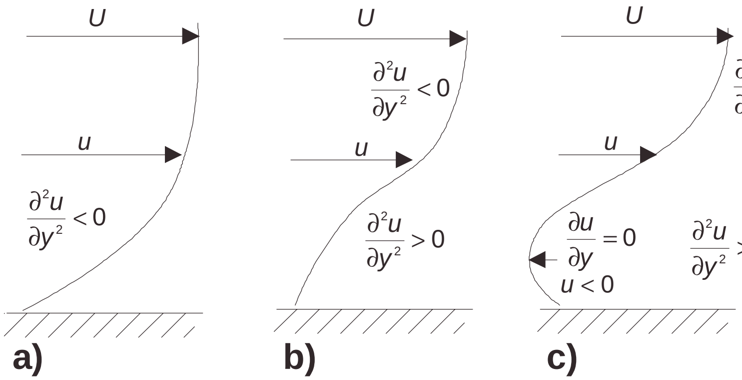
An der Wand gilt nach (8.2)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\nu}\frac{dp}{dx} \tag{8.18}$$

Ist dp/dx negativ, so haben wir den Fall von untenstehender Figur a)

Für dp/dx=0 erscheint an der Wand ein Wendepunkt der Kurve, dieser wandert mit zunehmendem positivem Druckgradienten in die Strömung hinaus (Figur b). Vorerst ist du/dy an der Wand aber immer noch positiv, wird aber mit zunehmendem Druckgradienten kleiner.

Der kritische Druckgradient ist erreicht, wenn an der Wand du/dy=0. Dann bildet sich ein Geschwindigkeitsminimum in der Strömung. Mit zunehmendem Druckgradienten wandert auch das Geschwindigkeitsminimum in die Strömung hinaus: es bildet sich eine Rückströmung (Figur c).



Die kritische Situation ist also erreicht, wenn an der Wand gilt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{8.19}$$

Dies ist die Bedingung, dass sich die Strömung von der Wand ablöst. War die Strömung vorher laminar, so wird sie in diesem Punkt in der Regel turbulent, und die dickere turbulente Grenzschicht schliesst sich wieder an die Wand an. Löst sich auch die turbulente Grenzschicht ab, ist die Gültigkeit der Gleichungen für die Grenzschicht nicht mehr erfüllt.

Die Integration der Gleichungen für die Grenzschicht (8.1 – 8.3) gibt eine gültige Lösung, solange die Strömung nicht abreisst, d.h. solange überall

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} > 0 \tag{8.20}$$

gilt. Ist dies nicht mehr der Fall, so weiss man zwar noch, dass die Strömung abreisst, aber nicht mehr, wie die Lösung aussieht (bei Abreissen der Strömung ist sicher das Druckprofil gegenüber der idealen Strömung modifiziert); die umgebende Strömung kann dann auch keine ideale Strömung mehr sein.

Zusätzliche Lektüre:

Empfehlenswerte Lektüre zur *Planetaren Grenzschicht* in der Atmosphäre findet sich in *Brown, Kap. 11.4 – 11.6* (die Ekman-Grenzschicht).